Grundzüge der Statistik II
SS 2006
Prof. Dr. Manfred Kraft

Aufgabenblatt 1 (19. KW)

Aufgabe 1
Ein idealer Würfel wird dreimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?

a) Die Augenzahl ist bei jedem Wurf gleich.
b) Die Augenzahl ist nicht bei jedem Wurf gleich.
c) Die Summe der Augenzahlen aller drei Würfe ist 5.
d) Die Summe der Augenzahlen aller Würfe ist mindestens 3.
e) Die Summe der Augenzahlen aller Würfe ist höchstens 18.
f) Die Augenzahl bei den ersten beiden Würfen ist gleich, der dritte Wurf weist eine andere Augenzahl auf.
g) Das Ereignis a) oder f) liegt vor.

Aufgabe 2
In der Urne zur Auslosung der nächsten Runde des DFB-Fußballpokals sind noch 5 Bundesligavereine, 2 Vereine der zweiten Liga und ein Amateurverein. Es wird zufällig (ohne Zurücklegen) gezogen. Die ersten beiden Vereine bilden die erste Paarung, die zweiten Vereine die zweite usw.. Jeweils der für eine Paarung zuerst gezogene Verein hat Heimrecht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) der Amateurverein in der ersten Paarung mit Heimrecht gezogen wird?
b) der Amateurverein Heimrecht hat?
c) kein Bundesligaverein Heimrecht hat?
d) in der ersten Paarung ein Bundesligaverein Heimrecht gegen einen Verein der zweiten Liga hat?

Aufgabe 3
Die Wahrscheinlichkeit in deutschen Ställen ein mit BSE infiziertes Rind zu finden, beträgt möglicherweise etwa ein Promille. Ein Schnelltest weist unter 1000 infizierten Rindern 999 als infiziert aus. Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit bei diesem Test, ein nicht infiziertes Rind als Träger des BSE Erregers zu erkennen rund 1 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv getestetes Rind tatsächlich infiziert ist?

Aufgabe 4
40% der Bevölkerung eines bestimmten Landes hat als höchsten Bildungsabschluss einen Hauptschulabschluss, 50% haben Abitur und 10% ein Diplom. Arbeitslos sind 10% der Hauptschüler, 5% der Abiturienten und 2% der Hochschulabsolventen. Eine zufällig ausgewählte Person sei arbeitslos. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person Hochschulabsolvent ist?

Aufgabe 5
Eine Münze wird viermal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei

a) zweimal
b) dreimal

Zahl oben liegt.

Aufgabe 6
Einer Urne mit 2 roten und 5 schwarzen Kugeln werden zufällig 4 Kugeln entnommen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, darunter keine, eine oder vier rote Kugeln zu finden, wenn die Kugeln gleichzeitig gezogen werden?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, darunter höchstens eine rote Kugel zu finden, wenn die Kugeln gleichzeitig gezogen werden?
c) Wie groß sind die unter a) zu bestimmenden Wahrscheinlichkeiten, wenn die gezogenen Kugeln vor dem Ziehen der nächsten Kugel wieder zurückgelegt worden wären?
d) Wie groß ist die unter b) zu bestimmende Wahrscheinlichkeit, wenn die gezogenen Kugeln vor dem Ziehen der nächsten Kugel wieder zurückgelegt worden wären?

Grundzüge der Statistik II
SS 2006
Prof. Dr. Manfred Kraft

Aufgabenblatt 2 (20. KW)

Aufgabe 7

Ein Werkstück wird kontrolliert nach richtiger Länge (L), falscher Länge ($\bar{L}$), richtiger Breite (B) und falscher Breite ($\bar{B}$). Unter 5.000 Stück hatten 4.500 Stück die richtige Länge und die richtige Breite. 50 Stück hatten die falsche Länge und die falsche Breite. Insgesamt hatten 300 Stück die falsche Länge.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Werkstück
   a. die richtige Länge
   b. die richtige Breite
   c. die richtige Länge und die falsche Breite

   hat.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer zufälligen Auswahl von drei Werkstücken mindestens 2 die richtige Länge und die richtige Breite besitzen.

Aufgabe 8

Drei Aggregate A_1, A_2, A_3 haben mit einer Wahrscheinlichkeit von $P_1 = \frac{4}{7}$, $P_2 = \frac{3}{5}$ und $P_3 = \frac{3}{4}$ mindestens eine Lebensdauer von 1.000 Stunden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 2 Aggregate mindestens 1.000 Stunden überdauern.

Aufgabe 9

Die mittlere Betriebszugehörigkeitsdauer der Beschäftigten eines Unternehmens betrage 11,1 Jahre bei einer Standardabweichung von 3 Jahren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Betriebszugehörigkeit von 100 zufällig Ausgewählten größer als 12 Jahre ist?

Aufgabe 10

Das Gewicht von bestimmten Brötchen beträgt im Durchschnitt 50 g bei einer Varianz von 5,76 g². Im Auftrag einer Verbraucherorganisation werden Stichproben vom Umfang n = 36 gezogen. Über die Art der Verteilung der Brötchengewichte ist nichts bekannt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein mittleres Brötchengewicht von mehr als 51 g zu erhalten?

Aufgabe 11

Nach den Angaben des Herstellers einer bestimmten Abfüllanlage sind die Füllmengen normalverteilt mit dem Erwartungswert 1.000 g und der Standardabweichung 10 g. Um diese Angaben zu überprüfen, wird der laufenden Produktion eine einfache Zufallsstichprobe von 100 abgefüllten Packungen entnommen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Packung in der Stichprobe weniger als 990 g wiegt.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert der Füllmenge in der Stichprobe unter 998 g liegt.

Grundzüge der Statistik II
SS 2006
Prof. Dr. Manfred Kraft

Lösungen zu Aufgabenblatt 3 (21. KW)

Aufgabe 12
Eine 'Multiple-Choice'-Klausur enthält 48 Fragen mit jeweils 4 Antwortvorgaben. Es ist jeweils nur eine der gegebenen Antworten richtig. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 24 richtige Antworten erforderlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gänzlich unvorbereiteter Student durch bloßes Raten diese Klausur besteht?

Aufgabe 13
Eine Multiple-Choice-Klausur in Makroökonomie besteht aus 20 Fragen. Für jede Frage sind fünf Antworten vorgegeben, von denen jeweils genau eine richtig ist. Ab 10 richtig beantworteten Fragen wird die Klausur als bestanden gewertet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ohne Wissen und nur durch zufälliges Ankreuzen die Klausur zu bestehen? Geben Sie die Zufallsvariable und deren Verteilung an. Ansonsten genügt der Ansatz.

Aufgabe 14
In einem Unternehmen mit einer sehr großen Anzahl von Buchungen beträgt der Anteil der Fehlbuchungen $\pi = 0{,}001$. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Prüfung, bei der $n = 2000$ Buchungen zufällig ausgewählt werden, genau $X = 3$ Fehlbuchungen gefunden werden.

Aufgabe 15
Von den 1000 Studierenden eines Fachbereiches bestreiten 300 ihr Studium aus eigenen Mitteln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 50 zufällig ausgewählten Studierenden 13 bis 20 ihr Studium selbst finanzieren?

Aufgabe 16
Wie groß muss der Parameter n mindestens sein, damit eine Binomialverteilung mit dem Parameter $\pi = 0{,}1$

a) durch eine Normalverteilung approximiert werden darf?
b) durch eine Poissonverteilung approximiert werden darf?

Aufgabe 17
Von den 10449 Ende März 1990 registrierten Teilzeitbeschäftigten im Kreis Paderborn waren 9759 Frauen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer durch

a) Ziehen ohne Zurücklegen
b) Ziehen mit Zurücklegen

Gewonnenen Stichprobe vom Umfang 10 aus dieser Grundgesamtheit nur Frauen sind?

Aufgabe 18
Montags zwischen 7:30 Uhr und 8:00 Uhr ist an einer Tankstelle durchschnittlich ein Kunde zu bedienen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während dieser Zeit zwei Kunden zu bedienen sind?

Grundzüge der Statistik II
SS 2006
Prof. Dr. Manfred Kraft

Aufgabenblatt 4 (22. KW)

Aufgabe 19

a) Sind die folgenden Ergänzungen richtig oder falsch? Kreuzen Sie jeweils „R“ für „richtig“ und „F“ für „falsch“ an. Es können jeweils mehrere Ergänzungen richtig sein:

Eine normalverteilte Zufallsvariable

R F besitzt eine Dichte mit genau einem Wendepunkt.

R F kann jede reelle Zahl mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen.

R F besitzt eine Dichte, die für jede reelle Zahl positiv ist.

R F besitzt eine stetige Verteilung.

R F besitzt eine Dichte mit mindestens einem Wendepunkt.

R F ist symmetrisch zur Achse $x = \mu$.

R F ist unimodal.

Ein effizienter Schätzer

R F ist erwartungstreu.

R F ist asymptotisch erwartungstreu.

R F ist konsistent.

R F für den Mittelwert μ der Grundgesamtheitsverteilung ist der Mittelwert $\overline{X}$ der Stichprobenverteilung.

b) Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Kreuzen Sie jeweils „R“ für „richtig“ und „F“ für „falsch“ an.

R F Der Mittelwert der Grundgesamtheit ist eine Zufallsvariable.

R F Stichprobenvariablen sind spezielle Zufallsvariablen.

R F Die Verteilung der Stichprobe eines Merkmals ist normalverteilt, wenn die Grundgesamtheit normalverteilt ist.

R F Bei einer einfachen Stichprobe sind die Stichprobenvariablen identisch verteilt.

R F Bei einer einfachen Stichprobe sind die Stichprobenvariablen unabhängig voneinander.

R F Für normalverteilte Grundgesamtheiten sind alle Stichprobenfunktionen bei reiner Zufallsauswahl auch normalverteilt.

R F Grundgesamtheit, Stichprobe und Stichprobenfunktion sind beim Vorliegen einer einfachen Stichprobe immer identisch verteilt.

R F Grundgesamtheit und Stichprobenfunktion sind immer identisch verteilt.

R	F	Selbst wenn eine einfache Stichprobe vorliegt, kann die Stichprobe anders verteilt sein als das normalverteilte Merkmal der Grundgesamtheit.
R	F	Schätzfunktionen nach der Momentenmethode und solche nach dem Maximum-Likelihood-Prinzip liefern keine genauen Schätzwerte für die unbekannten Parameter der Grundgesamtheit.
R	F	Realisationen von Zufallsvariablen sind wieder Zufallsvariable.
R	F	Der Erwartungswert einer Stichprobenfunktion kann nur ermittelt werden, wenn man alle möglichen Werte kennt, die die Stichprobenfunktion annehmen kann.
R	F	Identisch verteilte Zufallsvariable haben gleiche Erwartungswerte und Varianzen.
R	F	Nur für paarweise von einander unabhängige Zufallsvariable lassen sich Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Stichprobenfunktionen angeben.
R	F	Momentenmethode und Maximum-Likelihood-Prinzip führen stets zu identischen Schätzfunktionen
R	F	Schätzfunktionen sind Stichprobenfunktionen.
R	F	Eine asympthotisch erwartungstreue Schätzfunktion kann gleichzeitig erwartungstreu sein.
R	F	S_{n-1}^2 ist eine erwartungstreue Schätzfunktion und folglich ist auch S_{n-1} erwartungstreu

Aufgabe 20

a) Für eine einfache Zufallsstichprobe von n = 100 Studenten der Universität Paderborn hat man einen durchschnittlichen Bierkonsum von $\bar{x} = 1,54$ l/Tag ermittelt. Geben Sie den Momentenschätzer für den durchschnittlichen Bierkonsum aller Studenten der Paderborner Universität an.

b) Aufgrund einer einfachen Zufallsstichprobe wird ermittelt, dass ein Anteil von 8 % der Studenten der Universität Paderborn verheiratet ist. Ermitteln Sie den Momentenschätzer für den Anteil aller verheirateten Studenten der Universität Paderborn.

c) Eine einfache Zufallsstichprobe von n = 3 liefert $s^2 = 10$. Ermitteln Sie den Momentenschätzer für die Grundgesamtheitsvarianz. Bestimmen Sie auch den erwartungstreuen Schätzer für die Grundgesamtheitsvarianz.

Aufgabe 21

Ein Geschäftsinhaber interessiert die Zufriedenheit seiner 120 Kunden. Von den 120 Kunden wurden 5 Kunden durch eine einfache Stichprobe ausgewählt und befragt. Die ersten drei Befragten waren zufrieden, die danach befragten zwei Kunden waren unzufrieden.

Geben Sie die Likelihoodfunktion und einen ML-Schätzer für den Anteil der zufriedenen Kunden an.

Grundzüge der Statistik II
SS 2006
Prof. Dr. Manfred Kraft

Lösungen zu Aufgabenblatt 5 (23. KW)

Aufgabe 22
Mittels einer einfachen Stichprobe von 100 wurde die Körpergröße erwachsener Männer erfasst. Es ergab sich ein arithmetisches Mittel von 175 cm bei einer Standardabweichung von 12 cm.

a) In welchen Grenzen ist der unbekannte Mittelwert der Grundgesamtheit zu erwarten, wenn ein Vertrauensniveau von 95 % unterstellt wird?
b) Wie groß muss die Stichprobe mindestens sein, wenn eine Aussagegenauigkeit von 2 cm verlangt wird?

Aufgabe 23
Mittels einer einfachen Stichprobe ausgewählte 49 Lastkraftwagen des gleichen Typs wurden jeweils mit 20 Liter Diesel betankt. Sie legten im Durchschnitt 50 km damit zurück. Als Standardabweichung der zurückgelegten Entfernungen der 49 LKW wurden 7 km ermittelt.

a) Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Kilometerleistung dieses LKW-Typs.
b) Wie groß müsste der Stichprobenumfang n gewählt werden, wenn bei gleicher Sicherheit das Konfidenzintervall für die durchschnittliche Kilometerleistung eine Breite von 2.000 m aufweisen soll?

Aufgabe 24
Das Gewicht von Eiern der Güteklasse L wird unabhängig vom Anbieter mit der Varianz σ^2 als normalverteilt unterstellt. Ein Statistiker kauft eine 6er Packung Eier im Supermarkt und eine 4er Packung Eier im Direktverkauf auf dem Bauernhof. Die einzelnen Eier vom Bauernhof wiegen (in Gramm): 69,9; 67,4; 70,6; 64,5.
Für die Packung aus dem Supermarkt ermittelt der Statistiker ein Durchschnittsgewicht von 65,7g und eine Standardabweichung von 2,5g.

a) Schätzen Sie das Durchschnittsgewicht von Eiern vom Bauernhof auf Grund der vorliegenden Stichprobe als Punktschätzung und als Intervallschätzung (Konfidenzniveau 0,95).
b) Führen Sie für das Durchschnittsgewicht der Eier aus dem Supermarkt eine Punktschätzung und Intervallschätzung (Konfidenzniveau 0,95) durch.
c) Berechnen Sie das Schätzintervall für den Mittelwert der Grundgesamtheit aller Eier (Bauernhof und Supermarkt) bei einer Aussagesicherheit von 0.95.

Aufgabe 25
Eine einfache Stichprobe vom Umfang 900 erbrachte einen Frauenanteil von 51,3 %.

a) In welchen Grenzen liegt der Frauenanteil in der Grundgesamtheit bei einem Vertrauensniveau von 0,9?
b) Wie groß muss der Stichprobenumfang gewählt werden, wenn das Intervall höchstens eine Länge von 2,24 % haben soll?

Aufgabe 26

Von den 80.000 Besuchern einer Verbrauchermesse werden 196 zufällig ausgewählte Personen nach ihrem Wohnort befragt.

a) Berechnen Sie ein 95,45%-Konfidenzintervall für den Anteil der Einheimischen bei dieser Veranstaltung, wenn unter den Befragten 49 Einheimische festgestellt wurden.
b) Wie viele Personen müssten in die Befragung einbezogen werden, damit in jedem Fall mit einer Sicherheit von 95,45% die Intervalllänge höchstens 0,02 beträgt?

Aufgabe 27

Aus einer Produktionsserie werden durch eine einfache Zufallsstichprobe mit Zurücklegen 200 Stück entnommen. Es wird festgestellt, dass 80 Stück den Anforderungen nicht entsprechen. Geben Sie an, innerhalb welcher Grenzen der Anteil mangelhafter Stücke mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 erwartet werden kann.

Aufgabe 28

Ein Baustoffhändler bezieht Fliesen. Unter 150 Fliesen, die er der Lieferung zufällig entnimmt, finden sich 30 Fliesen 2. Wahl. Bestimmen Sie ein 90%-Konfidenzintervall für den Anteil der Fliesen 2. Wahl in der Lieferung.

Grundzüge der Statistik II
SS 2006
Prof. Dr. Manfred Kraft

Aufgabenblatt 6 (24. KW)

Aufgabe 29
Um den Mittelwert einer normalverteilten Zufallsvariablen bei einer Varianz von 150 mit einer Genauigkeit von ± 3 zu schätzen, sei ein Stichprobenumfang von genau 54 erforderlich (und hinreichend). Wie hoch ist die Irrtumswahrscheinlichkeit?

Aufgabe 30
Bei einem Stichprobenumfang von 100 ergibt sich bei einer Intervallschätzung für den Anteilswert π das Intervall $\left[0,013;0,187\right]$. Bestimmen Sie das zugrunde liegende Konfidenzniveau.

Aufgabe 31
Eine Intervallschätzung für den Anteil der Befürworter für den Bau einer Umgehungsstraße in einer Stadt ergibt das Intervall [0,7216; 0,8784]. Der Befragung lag eine einfache Stichprobe unter 100 Einwohnern dieser Stadt zugrunde.

a) Geben Sie eine Punktschätzung für den Anteil der Befürworter für den Bau einer Umgehungsstraße unter allen Einwohnern dieser Stadt an.
b) Wie groß ist die Aussagesicherheit bei der angegebenen Intervallschätzung?

Aufgabe 32
Für die Übernahmeprüfung von Kilorollen Kupferdraht wird folgende Regelung getroffen: Aus der jeweils gelieferten sehr umfangreichen Partie wird eine einfache Stichprobe mit $n = 64$ gezogen und deren Durchschnittsgewicht festgestellt. Bei zwei gelieferten Partien wird bei der Stichprobe für die erste Partie ein Durchschnittsgewicht von 1000g bei einer Standardabweichung von 3g und bei der Stichprobe für die zweite Partie ein Durchschnittsgewicht von 998g bei einer Standardabweichung von 4g ermittelt.

a) Treffen Sie bei $\alpha = 0,0455$ eine Aussage über den Unterschied der Durchschnittsgewichte beider Partien.
b) Welche Verteilung kann für den Fall angewendet werden, dass die Stichproben klein, die Grundgesamtheiten normalverteilt und die Varianzen unbekannt sind?

Aufgabe 33
Im Rahmen einer aktuellen Verbraucherstudie wurde Ende 2003 im Land D und Land F eine Befragung von Neuwagenkäufern durchgeführt. In Land D wurden 400 und in Land F 500 Käufer befragt. Die einfachen Zufallsstichproben führten zu den Ergebnissen, dass 360 Käufer in Land D und 385 Käufer in Land F den gekauften Neuwagen durch Leasing oder Kredite finanzierten.
Führen Sie eine Intervallschätzung für die Differenz der Anteilswerte zwischen Land D und F hinsichtlich der Käufer durch, die ihre Neuwagen durch Leasing oder Kredite finanzierten. Unterstellen Sie eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,05$. Geben Sie die Verteilung für die Differenz der Anteilswerte an.

Aufgabe 34
Am 31. Juli und 31. Dezember 2003 wurden jeweils 800 Pkw-Besitzer befragt, ob sie in diesem Monat an einem Verkehrsunfall beteiligt waren. Im Juli waren 96 und im Dezember 64 der befragten PKW-Besitzer in einen Verkehrsunfall verwickelt. Führen Sie eine Intervallschätzung für die Differenz der Anteilswerte zwischen Juli und Dezember hinsichtlich der Verkehrsunfälle durch. Unterstellen Sie ein Signifikanzniveau von 0,1 und geben Sie die Verteilung für die Differenz der Anteilswerte an.

Aufgabe 35
Bei einer Intervallschätzung für die Differenz der Mittelwert eines kardinalskalierten Merkmals in zwei voneinander unabhängigen Grundgesamtheiten, die aufgrund zweier einfacher Stichproben (n_1 = n_2 = 50) vorgenommen wurde, lautet das Ergebnis $(\mu_1 - \mu_2) \in [2;5]$ bei einer Aussagesicherheit von 0,95. Weiterhin liege Varianzhomogenität vor. Bestimmen Sie die Differenz der Stichprobenmittelwerte sowie die Grundgesamtheitsvarianz.

Aufgabe 36
Die Lebensdauer von Glühlampen kann als normalverteilt angenommen werden. Eine einfache Stichprobe vom Umfang n = 10 ergab als Schätzwert für die unbekannt Varianz der Grundgesamtheit s_{n-1}^2 = 196 (Stunden²). Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die unbekannte Varianz der Grundgesamtheit.

Aufgabe 37
Eine 101 Personen umfassende Untersuchung der Verteilung des Brutto-Einstiegsgehalts von Diplom-Kaufmännern ergab im Mittel 2600 € bei $s_{n-1} = 400$.

a) Geben Sie eine Intervallschätzung für die Varianz des Brutto-Einstiegsgehalts von Diplom-Kaufmännern mit einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von 0,95 an und nennen Sie die Voraussetzungen für die Schätzung.
b) Inwiefern ändert sich die Testverteilung in a), wenn der Erwartungswert des Brutto-Einstiegsgehalts von Diplom-Kaufmännern in der Grundgesamtheit bekannt wäre? Begründen Sie Ihre Antwort.

Grundzüge der Statistik II
SS 2006
Prof. Dr. Manfred Kraft

Aufgabenblatt 7 (25. KW)

Aufgabe 38
Ein Wodkahersteller überprüft seine Abfüllanlagen durch einen Test. Das Gesetz schreibt vor, dass er eine mittlere Füllmenge von 0,7 l einhalten muss. Es ist bekannt, dass die Füllmengen normalverteilt sind und eine Standardabweichung von 0,02 l aufweisen. Die Irrtumswahrscheinlichkeit sei mit 0,05 vorgegeben.

a) Der Hersteller ist aus Kostengründen auch gegen jede Überfüllung. Eine einfache Stichprobe von $n = 100$ erbrachte eine durchschnittliche Füllmenge von 0,6965 l. Ist das Stichprobenergebnis signifikant?
b) Der Verbraucherschutzbund wertet die Stichprobe ebenfalls aus und behauptet bei gleicher Irrtumswahrscheinlichkeit, die gesetzliche Füllmenge sei signifikant unterschritten. Nehmen Sie Stellung.

Aufgabe 39
Laut einer Veröffentlichung des Bonner Geographen und Unternehmensgründungsforschers Prof. Dr. G. wird nur jede zweite Firma in Deutschland älter als fünf Jahre (SZ 21.6.03).Eine Zufallsauswahl von 26 Unternehmen in Ostwestfalen-Lippe ergibt, dass das Durchschnittsalter 8,9 Jahre (Varianz 16 [Jahre²]) beträgt. Wird dadurch die Vermutung von Prof. Dr. G., dass das Durchschnittsalter kleiner als 9 Jahre ist, bestätigt? Gehen Sie dabei von einer Normalverteilung in der Grundgesamtheit aus. (Signifikanzniveau 5%)?

Aufgabe 40
„Die Deutschen, sagt die Statistik, haben eine Schwäche für Erdbeeren ... Der Pro-Kopf-Verbrauch beträgt ca. 2,6 Kilo ....“ (SZ 21.6.03). In einer Stichprobe unter 100 zufällig ausgewählten Deutschen wird ein Durchschnittsverbrauch von 2,4 kg festgestellt ($s = 1$ kg).
a) Spricht dieses Ergebnis signifikant gegen die Feststellung der SZ (Signifikanzniveau 5%)?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art bei diesem Test, wenn der wahre Pro-Kopf-Verbrauch 2,5 kg und die wahre Standardabweichung 0,4 kg betragen würde?

Aufgabe 41
Eine Portionieranlage für Kaffee liefert normalverteilte Packungsgewichte bei einer konstanten Varianz von $\sigma^2 = 36$ [g²]. Die Anlage wird regelmäßig auf die Einhaltung des Füllgewichts von 500 g mittels einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 9$ überprüft.
a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art, wenn der Nicht-Ablehnungsbereich eines geeigneten Tests zur Überprüfung der genannten Anlage von 496 bis 504 g reicht.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, wenn die Anlage im Durchschnitt tatsächlich nur 495 g pro Packung abfüllt?

Grundzüge der Statistik II
SS 2006
Prof. Dr. Manfred Kraft

Aufgabenblatt 8 (26. KW)

Aufgabe 42
Ein Großkunde will bei Zulieferungen höchstens einen Schlechtanteil von 5 % akzeptieren. Eine einfache Stichprobe von n = 225 ergab einen Anteil schlechter Stücke von 7 %. Der Kunde will die Lieferung zurückweisen. Ist dies berechtigt? Gehen Sie von einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % aus.

Aufgabe 43
Wie groß ist für einen Anteilswertetest mit der Alternativhypothese

$$H_1: \pi < 0,4$$

die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art falls tatsächlich π = 0, 35 gilt und wenn der Test zum Signifikanzniveau 0,05 mit einem Stichprobenumfang von 100 durchgeführt, und in der Stichprobe ein Anteilswert von 0,30 festgestellt wird?

Aufgabe 44
Für Ihre Diplomarbeit im Fach Marketing untersuchen Sie die durchschnittliche Dauer von Werbespots im Radio und Fernsehen im Jahr 1998. Die Dauer von Werbespots in beiden Medien stellt dabei eine normalverteilte Zufallsvariable dar.
Mittels einfacher Stichproben untersuchen Sie jeweils 100 Werbespots. Dabei zeigt sich folgendes Bild:

Radio		Fernsehen	
Mittlere Dauer $\overline{x}_R$	Abweichung $s_{R,n-1}$	Mittlere Dauer $\overline{x}_F$	Abweichung $s_{F,n-1}$
13,5 Sekunden	3 Sekunden	14,5 Sekunden	4 Sekunden

a) Bestätigen diese Daten die Hypothese, die im Fernsehen gelaufenen Werbespots seien durchschnittlich länger als jene, die im Radio liefen? (Aussagesicherheit 99,5 %)
b) Zwei Wochen nach Abgabe Ihrer Arbeit im Februar 1999 lesen Sie in einer Fachzeitschrift einen Artikel, wonach die durchschnittliche Werbedauer aller 1998 gesendeten Spots im Radio 13, 2 Sekunden (Varianz 9 [Sekunden²]) und im Fernsehen 14,338 Sekunden (Varianz 16 [Sekunden²]) betrug. Welchen Fehler haben Sie bei ihrer Testentscheidung gemacht und wie wahrscheinlich war er beim angewandten Test?

Aufgabe 45
Eine einfache Stichprobe im Umfang von n_1 = 400 Haushalten im Vorort A einer Großstadt ergab x_1 = 39 Haushalte mit einem Jahreseinkommen von mehr als € 60.000,-. Eine zweite unabhängige einfache Stichprobe im Umfang von n_2 = 300 Haushalten im Vorort B der gleichen Großstadt erbrachte x_2 = 45 Haushalte mit einem Jahreseinkommen von mehr als € 60.000,-. Steht dieses Ergebnis mit der Behauptung im Widerspruch, dass der Anteil der Haushalte mit einem Jahreseinkommen von mehr als € 60.000,- in den beiden Vororten gleich ist? (Das Signifikanzniveau sei α = 0,05)?

Grundzüge der Statistik II
SS 2006
Prof. Dr. Manfred Kraft

Aufgabenblatt 9 (27. KW)

Aufgabe 46

Die automatisch arbeitende Weinabfüllanlage ist vom Hersteller überholt und neu justiert worden. Es gilt als sicher, dass die Füllmengen normalverteilt sind. Es soll mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,05 getestet werden, ob der bisherige Sollwert der Varianz $\sigma^2=16$ (l^2) noch eingehalten wird. Aus einer einfachen Stichprobe vom Umfang n = 10 ergab sich ein Wert $s^2_{n-1} = 17{,}25$ (l^2).

Aufgabe 47

Die Länge von beschichteten Folien darf für die Weiterverarbeitung vom Normmaß 210 cm eine Standardabweichung von höchstens σ = 2,5 cm haben. Hauptverantwortlich für die Variabilität der Länge ist die Haltevorrichtung in der Zuführung zum Schnitt. Von einer neuen Zuschneidemaschine mit gänzlich neu entwickeltem Zuführungssystem werden normalverteilte Längen und eine Standardabweichung von weniger als σ = 1,5 cm versprochen. Eine einfache Stichprobe vom Umfang n = 10 ergibt für die Länge ein arithmetisches Mittel von $\bar{x}$ = 210 cm und weist eine Standardabweichung von s_n = 0,9 cm aus. Ist das Versprechen, dass die Standardabweichung der neuen Anlage kleiner als 1,5 cm ist, durch die obigen Ergebnisse mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % statistisch zu beweisen?

Aufgabe 48

Zwei Studentengruppen sind von zwei unterschiedlichen Tutoren auf eine Klausur vorbereitet worden. Bei Tutor 1 waren 8 Teilnehmer, bei Tutor 2 insgesamt 11 Studierende. Die Studenten, die bei Tutor 1 gelernt hatten, erreichten im Durchschnitt 84 Punkte bei einer Standardabweichung von 6 Punkten. Die Werte der Studenten von Tutor 2 lauten 90 und 8 Punkte. Unter der Annahme normalverteilter Grundgesamtheiten, einfacher unabhängiger Stichproben soll gestestet werden, ob die Studenten von Tutor 1 und 2 aus Grundgesamtheiten mit gleicher Varianz stammen. Die Irrtumswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 0{,}1$.

Aufgabe 49

Bei 11 und bei 10 Schrauben mit gewalztem bzw. gefrästem Gewinde wurde der Flankendurchmesser bestimmt. Es ergab sich für die gewalzten Schrauben ein arithmetisches Mittel von 23,189 mm, für die gefrästen von 23,277 mm. Die Varianzen der Grundgesamtheiten wurden entsprechend mit 0,001382 (mm^2) bzw. 0,000433 (mm^2) mittels erwartungstreuer Schätzer geschätzt.

a) Ist die Varianz bei den gewalzten Schrauben signifikant größer als bei den gefrästen Schrauben? ($\alpha = 0{,}05$)?
b) Unter welchen Voraussetzungen können Sie den Test durchführen?

Aufgabe 50

Bei einer Befragung nach Reisewünschen von 100 Jugendlichen äußerten sich Mädchen und Jungen wie folgt:

Reisewunsch	Jungen	Mädchen	∑
Vorhanden	15	17	32
Nicht vorhanden	45	23	68
∑	60	40	100

Ist der Reisewunsch vom Geschlecht der Befragten abhängig ($\alpha = 0{,}05$)?

Grundzüge der Statistik II
SS 2006
Prof. Dr. Manfred Kraft

Aufgabenblatt 10 (28. KW)

Aufgabe 51

Unternehmen A produziert Elektronikteile an drei Standorten. Im Rahmen der statistischen Qualitätskontrolle wurden jeweils 100 Teile von jedem Standort einer gründlichen Prüfung unterzogen. Dabei wurden beim Standort I 10 irreparabel defekte, 20 nachbesserungsbedürftige und 70 vollständig funktionstüchtige Teile festgestellt. Beim Standort II betrug die Zahl der irreparabel defekten Teile 5, die der nachbesserungsbedürftigen Teile 30. Insgesamt waren bei der Untersuchung 27 Teile irreparabel defekt und 215 Teile vollständig funktionstüchtig.

a) Besteht ein signifikanter Unterschied in der Qualität der Produktion an den drei Standorten ($\alpha = 0,05$)?

Wie lautet die H_0-Hypothese?

A	$\mu_I = \mu_{II} = \mu_{III}$
B	$\mu_I \neq \mu_{II} \neq \mu_{III}$
C	Qualität und Produktionsstandort sind abhängig.
D	Qualität und Produktionsstandort sind unabhängig.
E	Keine der genannten Alternativen

Wie lautet die Verteilung der Prüfgröße?

A	Gleich-Verteilung
B	Normalverteilung
C	Fisher-Verteilung
D	χ^2-Verteilung
E	Keine der genannten Alternativen

In welchem Intervall liegt die realisierte Prüfgröße?

A	$[-\infty;10]$
B	$(10;15]$
C	$(15;20)$
D	$[20;25)$
E	$[25;\infty]$

Wie lautet die exakte Anzahl an Freiheitsgraden (df)?

A	df = 5
B	df = 6
C	df = 99
D	df = 299
E	Keiner der genannten Werte

Welchen Wert nimmt die kritische Grenze an?

A	0,71
B	1,96
C	9,49
D	124,3
E	Keinen der genannten Werte

Wie lautet die Testentscheidung?

A	H_0 verwerfen → Unabhängigkeit
B	H_0 verwerfen → Abhängigkeit
C	H_0 beibehalten → Unabhängigkeit
D	H_0 beibehalten → Abhängigkeit
E	Keine der genannten Alternativen

b) Überprüfen Sie die Hypothese „Die Zahl der irreparablen Teile ist über die drei Standorte gleichverteilt“($\alpha = 0{,}05$).

Aufgabe 52

Für die in der nachfolgenden Tabelle gegebenen gruppierten Werte der beobachteten Gewichte von Paketen eines Verteildienstes soll mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\ \%$ überprüft werden, ob die beobachtete empirische Verteilung einer Normalverteilung genügt. Das durchschnittliche Paketgewicht wurde mit 5,1462 kg und die Varianz mit $s^2 = 0{,}589\ [kg^2]$ aus dieser Stichprobe geschätzt.

$x_{iu} < x_i \leq x_{io}$		n_i
3,0	3,6	2
3,6	4,2	8
4,2	4,8	35
4,8	5,4	43
5,4	6,0	22
6,0	6,6	15
6,6	7,2	5

Aufgabe 53
Eine Versicherungsgesellschaft versichert Kunstwerke auf dem Weg zu Ausstellungen gegen Transportschäden. Die Zahl der Schadensfälle verteilte sich in den letzten 100 Monaten wie folgt:

Anzahl der Schadensfälle	0	1	2	3	4
Monate	36	37	20	5	2

Überprüfen Sie, ob die Versicherungsgesellschaft bei der Prämienkalkulation von einer poissonverteilten Zufallsvariablen „Anzahl der Schadensfälle" ausgehen kann ($\alpha = 0{,}05$).

Aufgabe 54
Es soll bei einem Signifikanzniveau von 0,05 festgestellt werden, ob die Zugfestigkeit von Folien aus einer Titanlegierung an allen Stellen dieselbe ist. Vier Folien wurden untersucht. Es ergaben sich die in der Tabelle gezeigten Werte.

Messstelle	Messwerte			
Ecke	137	142	128	137
Mitte	140	139	117	137
Kante	142	140	133	141

Aufgabe 55
Die induktive Statistik

A	wird auch als beschreibende Statistik bezeichnet.
B	wird auch als schließende Statistik bezeichnet.
C	zieht aus vorhandenen Daten, die lediglich eine Stichprobe der Gesamtdaten darstellen, Schlüsse für die (unbekannte) Gesamtmenge von Daten.
D	basiert auf der deskriptiven Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bei einem Laplace-Experiment

A	sind alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich.
B	treten die Elementarereignisse jeweils mit unterschiedlich hoher Wahrscheinlichkeit ein.
C	lässt sich die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen, indem die Anzahl der günstigen Elementarereignisse in Beziehung zur Gesamtzahl aller möglichen Elementarereignisse gesetzt wird.

Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig, falls

A	das Eintreten von Ereignis A Auswirkungen auf die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B hat, und umgekehrt.
B	das Eintreten von Ereignis A keine Auswirkungen auf die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B hat, und vice versa.
C	sich die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Auftreten von A und B als $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ berechnen lässt.

Eine Zufallsvariable Z

A	heißt diskret, wenn sie nur endlich oder abzählbar viele Werte annehmen kann.
B	heißt diskret, wenn sie (innerhalb gewisser Grenzen) alle möglichen reellen Zahlen als Werte annehmen kann.
C	heißt stetig, wenn sie nur endlich oder abzählbar viele Werte annehmen kann.
D	heißt stetig, wenn sie (innerhalb gewisser Grenzen) alle möglichen reellen Zahlen als Werte annehmen kann.

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen Z

A	gibt an, welcher Wert bei häufigen Versuchswiederholungen im Durchschnitt erreicht wird.
B	ist stets eine mögliche Realisation von Z.
C	ist nicht notwendigerweise eine mögliche Realisation von Z.

Nach dem „Gesetz der großen Zahl"

A	stimmen bei sehr häufiger Wiederholung eines Zufallsexperiments das arithmetische Mittel der Realisationen und der Erwartungswert überein.
B	nähert sich bei sehr häufiger Wiederholung eines Zufallsexperiments das arithmetische Mittel der Realisationen dem Erwatungswert an.
C	nähert sich bei sehr häufiger Wiederholung eines Zufallsexperiments der Erwatungswert dem arithmetischen Mittel der Realisationen an.

Eine Stichprobe heißt einfache Zufallsstichprobe, wenn

A	jedes Element der Grundgesamtheit mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt werden kann.
B	jedes Element gemäß einer uneingeschränkten Zufallsauswahl gezogen wird.
C	die Ziehung der einzelnen Elemente unabhängig voneinander geschieht.
D	alle Stichprobenvariablen dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung wie die Grundgesamtheit haben.

Bei der Punktschätzung

A	werden auf der Basis einer einfachen Zufallsstichprobe Parameterwerte wie Erwartungswert oder Varianz geschätzt.
B	wird auf der Basis einer einfachen Zufallsstichprobe ein Intervall berechnet, das den (unbekannten) wahren Parameter mit hoher vorgegebener Wahrscheinlichkeit überdeckt.
C	wird aus einer einfachen Stichprobe eine reelle Zahl als Approximation für einen unbekannten Parameter ermittelt.